

1. Le facteur de transmission énergétique à l'interface air-muscle vaut ² :

$$T = \frac{4Z_a Z_m}{(Z_a + Z_m)^2} \quad \text{soit} \quad T = 9,410^{-4}$$

Cette valeur est très faible : une onde ultrasonore ne quasiment pénètre pas le corps.

C'est pourquoi il est nécessaire de rajouter une couche supplémentaire qui joue le rôle de couche anti-reflet (voir question suivante) afin de pouvoir réaliser une échographie.

2. (a) On parle d'impédance, donc on se place en régime sinusoïdal (ce que l'énoncé entend par "son pur") : les ondes ont la forme d'OPPH, ici en notation complexe, à la pulsation ω .

On distingue deux types d'OPPH (en notation complexe) :

- celles en $Ae^{j(\omega t - kx)}$, qui se propagent selon les x croissants.
- celles en $Ae^{j(\omega t + kx)}$, qui se propagent selon les x décroissants.

où le vecteur d'onde k dépend du milieu dans lequel se propage l'onde³.

L'amplitude de chacune des ondes est *a priori* différente.

D'après l'énoncé, une onde arrive dans l'air et traverse la couche de graisse.

À l'interface graisse - muscle, une onde est transmise et une onde est réfléchie.

L'onde transmise pénètre dans le muscle sans retour (milieu musculaire « profond »).

Il n'y a pas « d'onde retour » dans l'air si la couche fonctionne correctement (l'objectif est d'avoir une couche anti-reflet, c'est-à-dire de supprimer l'onde réfléchie dans l'air).

- (b) Avec notre définition de l'impédance, on aura $p = Zv$ pour une onde se propageant selon $+\vec{u}_x$ et $p = -Zv$ pour une onde se propageant selon $-\vec{u}_x$.

On en déduit que :

- pour $x < 0$:

$$p(x, t) = Z_a A_a \exp j(\omega t - k_a x)$$

- pour $0 < x < e$:

$$p(x, t) = Z_g A_g \exp j(\omega t - k_g x) - Z_g B_g \exp j(\omega t + k_g x)$$

- pour $x > e$:

$$p(x, t) = Z_m A_m \exp j(\omega t - k_m x)$$

(c) Les conditions aux limites imposent la continuité de v et p en $x = 0$ et $x = e$.

On en déduit les quatre relations suivantes :

$$A_a = A_g + B_g \quad (1)$$

$$A_g \exp j(\omega t - k_g e) + B_g \exp j(\omega t + k_g e) = A_m \exp j(\omega t - k_m e) \quad (2)$$

$$Z_a A_a = Z_g (A_g - B_g) \quad (3)$$

$$Z_g (A_g \exp j(\omega t - k_g e) - B_g \exp j(\omega t + k_g e)) = Z_m A_m \exp j(\omega t - k_m e) \quad (4)$$

On les combine de la façon suivante :

$$\frac{Z_g(1) + (3)}{Z_g(1) - (3)} \Rightarrow \frac{(Z_g + Z_a)A_a}{(Z_g - Z_a)A_a} = \frac{2Z_g A_g}{2Z_g B_g} \Rightarrow \frac{Z_g + Z_a}{Z_g - Z_a} \left(\frac{A_g}{B_g} \right) \quad (5)$$

$$\frac{Z_g(2) + (4)}{Z_g(1) - (4)} \Rightarrow \frac{A_g \exp(-2jk_g e)}{B_g} = \frac{Z_g + Z_m}{Z_g - Z_m} \quad (6)$$

On en déduit :

$$(5) \times (6) \Rightarrow \underbrace{\frac{Z_g + Z_a}{Z_g - Z_a}}_{\text{réel} > 0} \exp(2jk_g e) = \underbrace{\frac{Z_g + Z_m}{Z_g - Z_m}}_{\text{réel} < 0}$$

Les deux termes doivent être réels, donc $\sin(2k_g e) = 0$, de sorte que $\cos(2k_g e) = \pm 1$.

Les signes des termes en "impédances" impliquent que $\cos(2k_g e) = -1$ soit $2k_g e = \pi + 2n\pi$

On obtient donc :

$$e = (2n + 1) \frac{\pi}{2k_g} = (2n + 1) \frac{\lambda_g}{4}$$

On a alors $\frac{Z_g + Z_a}{Z_g - Z_a} = \frac{Z_g + Z_m}{-Z_g + Z_m}$ soit : $Z_g \approx \sqrt{Z_a Z_m}$

$(Z_g + Z_a)(-Z_g + Z_m) = (Z_g - Z_a)(Z_g + Z_m)$
 $-Z_g^2 + Z_g Z_m - Z_a Z_g + Z_a Z_m = Z_g^2 + Z_g Z_m - Z_a Z_g - Z_a Z_m$
 $2Z_g^2 = 2Z_a Z_m$

A.N. $Z_g = 2,6 \times 10^4 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$

L'impédance à utiliser est « intermédiaire »⁴ : $Z_a < Z_g < Z_m$.

Circuit RL excité par une tension sinusoïdale

1 Equation différentielle.

La loi d'additivité des tensions donne :

$$v(t) = v_R(t) + v_B(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

2 Régime forcé. Détermination de I_m et φ .

a. $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v) =$ partie réelle de $\underline{v}(t) = V_m \exp(j\varphi_v) \exp(j\omega t) = \underline{V}_m \exp(j\omega t)$
 $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) =$ partie réelle de $\underline{i}(t) = I_m \exp(j\varphi_i) \exp(j\omega t) = \underline{I}_m \exp(j\omega t)$

b. L'équation différentielle complexe associée à l'équation reliant $v(t)$ à $i(t)$ établie à la question 1.1 s'écrit donc :

$$\underline{v}(t) = R\underline{i}(t) + L \frac{d\underline{i}(t)}{dt}$$

c. En appliquant les règles usuelles de dérivation, il vient :

$$\frac{d\underline{i}(t)}{dt} = j\omega \underline{I}_m \exp(j\omega t) \text{ et } \int \underline{i}(t) dt = -\frac{j}{\omega} \underline{I}_m \exp(j\omega t)$$

L'équation différentielle complexe devient donc : $\underline{V}_m = \underline{I}_m(R + jL\omega)$, qui permet de donner l'expression de l'amplitude complexe :

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{V}_m}{R + jL\omega} \text{ soit : } I_m \exp(j\varphi_i) = \frac{V_m \exp(j\varphi_v)}{R + jL\omega}$$

On peut alors calculer le module I_m et l'argument $\varphi = \varphi_i - \varphi_v$:

$$\text{Module : } I_m = |\underline{I}_m| = \frac{|\underline{V}_m|}{|R + jL\omega|} = \frac{V_m}{(R^2 + L^2\omega^2)^{1/2}}$$

$$\text{Argument : } I_m \exp j \underbrace{(\varphi_i - \varphi_v)}_{\varphi} = \frac{V_m}{R + jL\omega} = \frac{V_m(R - jL\omega)}{R^2 + L^2\omega^2}$$

Or $I_m \exp(j\varphi) = I_m \cos \varphi + jI_m \sin \varphi$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \frac{R}{(R^2 + L^2\omega^2)^{1/2}} \\ \sin \varphi = \frac{-L\omega}{(R^2 + L^2\omega^2)^{1/2}} \\ \tan \varphi = \frac{-L\omega}{R} \end{cases}$$

Etude du module :

$$I_m = V_m \cdot [R^2 + L^2\omega^2]^{-1/2} \Rightarrow \frac{dI_m}{d\omega} = -\frac{V_m L^2 \omega}{[R^2 + L^2\omega^2]^{3/2}} \Rightarrow \frac{dI_m}{d\omega} \rightarrow 0 \text{ pour } \omega \rightarrow 0 \text{ et } \omega \rightarrow \infty$$

$$\text{Si } \omega \rightarrow 0, I_m \rightarrow \frac{V_m}{R} \quad \text{Si } \omega \rightarrow \infty, I_m \rightarrow \frac{V_m}{L\omega} \rightarrow 0$$

Etude de l'argument :

$$\text{Pour } \omega \rightarrow 0, \sin \varphi \rightarrow -\frac{L\omega}{R} \rightarrow 0 \text{ et } \cos \varphi \rightarrow 1 \Rightarrow \varphi \rightarrow 0$$

$$\text{Pour } \omega \rightarrow \infty, \sin \varphi \rightarrow -1 \text{ et } \cos \varphi \rightarrow \frac{R}{L\omega} \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

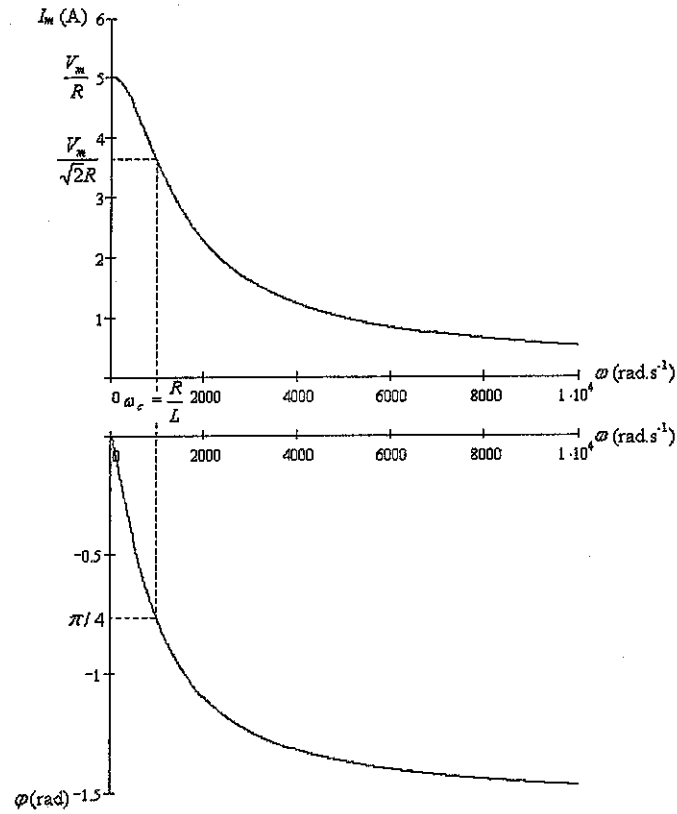


FIG. 1 - Représentations de $I_m(\omega)$ et de $\varphi(\omega)$